

УДК 517.968: 519.612:004.021

Е. Н. Акимова, В.Е. Мисилов, А.И. Третьяков

## Методы решения обратной задачи магнитометрии о нахождении поверхностей раздела сред на суперкомпьютере «Уран»<sup>1</sup>

Аннотация. Для решения трехмерной структурной обратной задачи магнитометрии о нахождении поверхностей раздела сред постоянной вертикальной намагниченности рассматриваются итерационные методы градиентного типа с весовыми множителями для решения задачи в многослойной среде.

На основе этих методов для решения задачи магнитометрии разработаны эффективные параллельные алгоритмы решения обратных задач, численно реализованные на многопроцессорных системах различного типа: многоядерном процессоре Intel и графических процессорах NVIDIA, входящими в состав суперкомпьютера «Уран». Проведено исследование эффективности и оптимизация параллельных алгоритмов.

*Ключевые слова и фразы:* обратная задача магнитометрии, итерационные методы, параллельные алгоритмы, многопроцессорные вычислительные системы.

### Введение

Важнейшей задачей при исследовании структуры земной коры является обратная задача магнитометрии о нахождении поверхностей раздела сред постоянной вертикальной намагниченности по известным скачкам намагниченности и вертикальной компоненте магнитного поля, измеренной на некоторой площади земной поверхности [1]. Задача магнитометрии является некорректно поставленной и описывается нелинейным интегральным уравнением Фредгольма первого рода. При разработке методов решения задачи используются идеи итеративной регуляризации [2-3]. После дискретизации задача сводится к системам нелинейных уравнений большой размерности (до нескольких сотен тысяч). Необходимость повышения точности результатов решения задач, в частности, использование более мелких сеток, существенно увеличивает время вычислений.

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке УрО РАН в рамках программы фундаментальных исследований Президиума РАН.

Одним из путей уменьшения времени расчетов и повышения эффективности решения геофизических задач является распараллеливание алгоритмов и использование многопроцессорных вычислительных систем (МВС). В Институте математики и механики УрО РАН (г. Екатеринбург) установлен суперкомпьютер «Уран», который успешно используется при решении прикладных задач. Суперкомпьютер «Уран» включает в себя гибридный вычислительный кластер на основе видеоускорителей NVIDIA Tesla и многоядерных CPU.

В данной работе рассматриваются линеаризованные итерационные методы градиентного типа с весовыми множителями для решения задачи в многослойной среде. На основе этих методов разработаны эффективные параллельные алгоритмы, численно реализованные на многопроцессорных вычислительных системах различного типа.

## 1. Обратная задача магнитометрии о нахождении поверхностей раздела сред

### 1.1. Постановка обратной задачи магнитометрии о нахождении поверхностей раздела в многослойной среде

Предполагается, что нижнее полупространство состоит из нескольких слоев постоянной вертикальной намагниченности, разделенных искомыми поверхностями  $S_l$ ,  $l = 1, \dots, L$ , где  $L$  – число границ раздела (рис. 2). Магнитный эффект от такого полупространства равен сумме магнитных эффектов от всех поверхностей раздела.

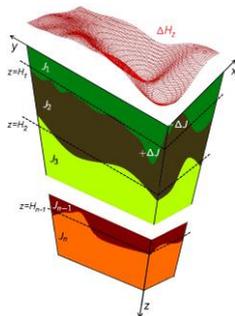


Рис. 1. Модель многослойной среды

Пусть поверхности раздела задаются уравнениями  $z_l = z_l(x, y)$ , скачки намагниченности на них равны  $\Delta J_l^z$ , поверхности имеют горизонтальные асимптотические плоскости  $z_l = H_l$ , т. е.  $\lim_{|x|, |y| \rightarrow \infty} |z_l(x, y) - H_l| = 0$ . Поле от суперпозиции границ равно

$$A(z) \equiv \sum_{l=1}^L \Delta J_l^z \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{z_l(x, y')}{\left[ (x-x')^2 + (y-y')^2 + z_l^2(x', y') \right]^{3/2}} - \frac{H_l}{\left[ (x-x')^2 + (y-y')^2 + H_l^2 \right]^{3/2}} \right\} dx dy = \Delta H^z(x', y', 0), \quad (1)$$

где  $L$  – число границ раздела.

После дискретизации уравнения (3) на сетке  $n = M \times N$ , где задана правая часть  $\Delta H^z(x, y)$ , и аппроксимации интегрального оператора  $A(z)$  по квадратурным формулам имеем вектор правой части  $F(x, y)$  размерности  $M \times N$ , искомый вектор решения  $z(x, y) = [z_1(x, y), \dots, z_L(x, y)]$  размерности  $L \times M \times N$ , матрицу производной оператора  $A'(z^k)^T$  размерности  $L \times M^2 \times N^2$  и систему нелинейных уравнений

$$\tilde{A}_n[z] = \tilde{F}_n. \quad (2)$$

Задача является недоопределенной, так как по заданной функции  $\Delta H^z(x, y)$  необходимо найти несколько неизвестных функций  $z_l = z_l(x, y)$ , что влечет неединственность решения.

Глубины залегания разных границ могут значительно различаться, и если решение ищется в виде абсолютных значений глубин  $z_l = z_l(x, y)$ , то фрагменты общего вектора решения  $z(x, y)$  будут разномасштабными. Градиентные методы

чувствительны к разномасштабности, поэтому для компенсации проведём замену переменных — будем искать не абсолютное значение  $z_l(x, y)$ , а относительное  $\bar{z}_l(x, y) = z_l(x, y) / H_l$ .

Формула (1) принимает вид

$$\bar{A}(\bar{z}) \equiv \sum_{l=1}^L \Delta J_l^z \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\bar{z}_l(x, y') H_l}{\left[ (x-x')^2 + (y-y')^2 + \bar{z}_l^2(x', y') H_l^2 \right]^{3/2}} - \frac{H_l}{\left[ (x-x')^2 + (y-y')^2 + H_l^2 \right]^{3/2}} \right\} dx dy. \quad (1a)$$

## 2. Итерационные методы решения обратной задачи магнитометрии

### 2.1. Методы решения задачи в многослойной среде

Для решения задачи магнитометрии в многослойной среде предлагается использовать линеаризованные итерационные методы градиентного типа с весовыми множителями  $\gamma_i$ , вычисляемыми для каждой компоненты  $z_i$  ( $i = 1, \dots, L \times M \times N$ ) [5]:

- линеаризованный метод наискорейшего спуска (ЛМНС)

$$\bar{z}^{k+1} = \bar{z}^k - \gamma \circ \frac{\|S(\bar{z}^k)\|^2}{\|\bar{A}'(\bar{z}^k)S(\bar{z}^k)\|^2} S(\bar{z}^k), \quad (3)$$

$$S(\bar{z}^k) = \bar{A}'(\bar{z}^k)^T (\bar{A}(\bar{z}^k) - F);$$

• линеаризованный метод сопряженных градиентов (ЛМСГ)[6]

$$\begin{aligned} \bar{z}_i^{k+1} &= \bar{z}_i^k - \gamma_i \circ \frac{(p^k, S(\bar{z}^k))}{\|\bar{A}'(\bar{z}^k)p^k\|^2} p_i^k, \\ p^k &= S(\bar{z}^k) + \beta p^{k-1}, p^0 = S(\bar{z}^0), \\ \beta &= \max \left\{ 0, \frac{(S(\bar{z}^k), S(\bar{z}^k) - S(\bar{z}^{k-1}))}{\|S(\bar{z}^{k-1})\|^2} \right\}, \\ S(\bar{z}^k) &= \bar{A}'(\bar{z}^k)^T (\bar{A}(\bar{z}^k) - F); \end{aligned} \tag{4}$$

где  $\gamma = [\gamma_1, \gamma_2 \dots \gamma_{L \times N \times M}]$ ,  $\gamma_i \in [0, 1]$ ,  $k$  – номер итерации,  $\circ$  — операция покомпонентного произведения.

Весовые множители  $\gamma_i$ , соответствующие компонентам вектора  $z^k$ , выбираются специальным образом путем нормировки выделенных по методике [4] аномальных полей из общего магнитного поля  $\Delta H^z(x, y)$  для каждой границы раздела.

В качестве начального приближения используются горизонтальные асимптотические плоскости  $\bar{z}_i^0 = 1$ .

Условием останова итерационных процессов (3)–(5) является выполнение условия  $\|\bar{A}(\bar{z}) - F\| / \|F\| < \varepsilon$  при достаточно малом  $\varepsilon$ , где  $F = \sum_{l=1}^L F_l$ .

### 3. Распараллеливание и численная реализация методов решения задачи на многопроцессорных системах

Параллельные алгоритмы решения структурной обратной задачи магнитометрии о восстановлении поверхности раздела сред на основе линеаризованных методов градиентного типа с весовыми множителями численно реализованы на многоядерном процессоре Intel и графических процессорах NVIDIA, входящими в состав суперкомпьютера «Уран» (ИММ УрО РАН). Параллельные алгоритмы реализованы

на графических процессорах NVIDIA – с помощью технологии CUDA и библиотеки CUBLAS, на многоядерном процессоре – с помощью технологии OpenMP.

С целью оптимизации выполнения векторно-матричных операций проведено распараллеливание и векторизация циклов с помощью технологии OpenMP и средств компилятора Intel .

Параллельные алгоритмы решения структурных обратных задач магнитометрии о восстановлении поверхностей раздела сред встроены в разработанную систему удаленных вычислений «Специализированный веб-портал решения задач на многопроцессорных вычислительных системах» [7], установленный в отделе некорректных задач анализа и приложений Института математики и механики УрО РАН. В настоящее время на веб-портале предусмотрен запуск программ для решения задач магнитометрии на МВС-ИММ и суперкомпьютере «Уран», включающем в себя вычислительный кластер на основе видеоускорителей NVIDIA Tesla.

Специализированный веб-портал предоставляет возможность пользователю через веб-интерфейс выбирать тип многопроцессорного вычислителя с указанием числа процессорных узлов (МВС, NVIDIA Tesla, Multi-Core CPU), вид задачи и метод ее решения, загружать входные данные, получать выходные данные и графическое изображение результатов решения с помощью графических пакетов Surfer и gnuplot. Для каждой задачи выводится время счета.

#### **4. Результаты численных экспериментов**

В данной работе приводятся результаты численных экспериментов на основе методов при решении задачи магнитометрии для трехслойной среды, разделенной искомыми поверхностями  $S_1$  и  $S_2$  с модельными данными на площади  $S$ , имеющей размеры 127,5 км x 127,5 км. Суммарное магнитное поле на площади  $S$  находилось путем решения прямой задачи магнитометрии по формуле (1) с известными границами (рис. 2).

Расстояния до асимптотических плоскостей принимались равными 5 и 20 км. Соответствующие скачки намагниченности принимались равными 0,2 А/м. Шаги сетки составили  $\Delta x = \Delta y = 1.0$  км.

После дискретизации уравнения (2) на сетке  $2^8 \times 2^8$  имеем вектор правой части  $F(x, y)$  размерности, результирующий вектор решения  $\bar{z}(x, y)$  размерности  $2^{17}$ , матрицу производной оператора  $\bar{A}'(\bar{z}^k)^T$  размерности  $2^{16} \times 2^{17}$  и систему нелинейных уравнений вида (2).

Для решения задачи использовались параллельные итерационные линеаризованные методы (3), (4) с весовыми множителями. Задача на вычислительном кластере NVIDIA Tesla с применением технологии OpenMP и технологии CUDA.

На рис. 2 изображены модельные поверхности раздела, а на рис. 3 — приближенные решения – восстановленные поверхности раздела.

При решении задачи методами ЛМНС и ЛМСГ относительные нормы невязок  $\varepsilon = \|\bar{A}(\bar{z}) - F\| / \|F\|$  по сравнению с начальной нормой невязки  $\varepsilon_0 = 1$  уменьшились на два порядка и составили  $\varepsilon \approx 0.05$  (за 69 и 39 итераций соответственно). Относительные погрешности  $\delta_i = \|z_i^T - z_i^{np}\| / \|z_i^T\| \cdot 100\%$  для решений  $z_1(x, y)$  и  $z_2(x, y)$  составили 3,8 % и 3,9 %, соответственно.

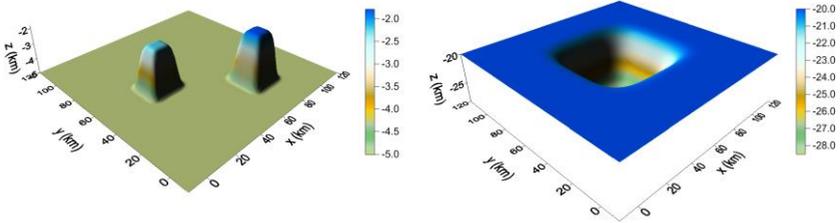


РИС. 2. Модельные границы

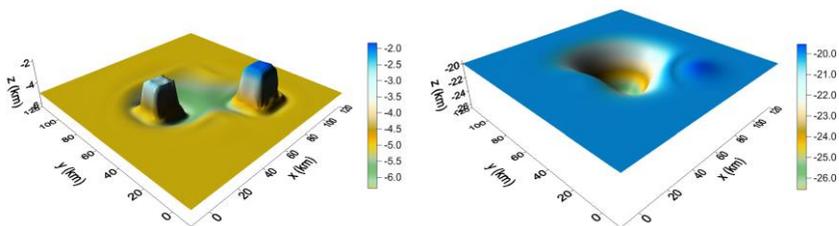


РИС. 3. Восстановленные границы

Для сравнения времени счета решения задачи введем коэффициенты ускорения и эффективности параллельных алгоритмов

$$S_m = T_1 / T_m, \quad E_m = S_m / m, \quad S = T_1 / T_2,$$

где  $T_m$  — время выполнения параллельного алгоритма на многоядерном процессоре или нескольких видеоускорителях с числом ядер или ускорителей  $m$  ( $m > 1$ ),  $T_1$  — время выполнения последовательного алгоритма на одном видеоускорителе либо на одном ядре,  $T_m$  представляет собой совокупность чистого времени счета и накладных расходов.

В таблицах 1 и 2 приводятся времена и коэффициенты эффективности и ускорения решения нелинейной задачи магнитометрии для трехслойной среды линеаризованными методами на графических процессорах NVIDIA Tesla и многоядерном процессоре Intel Xeon. Наименьшим временем решения задачи является время счета на видеоускорителе NVIDIA Tesla, которое в 10 раз меньше времени решения задачи на 8 ядрах процессора Intel Xeon.

ТАБЛИЦА 1

## Решение задачи методом ЛМНС

| Вычислитель                    | $T_m$ , мин. | $S_m$ (S) | $E_m$ |
|--------------------------------|--------------|-----------|-------|
| Intel Xeon (1 ядро)            | 266          | -         | -     |
| Intel Xeon (8 ядер)            | 37           | 7,2       | 0,9   |
| NVIDIA Tesla<br>(1 ускоритель) | 3,6          | -         | -     |
| NVIDIA Tesla<br>(2 ускорителя) | 1,84         | 1,95      | 0,98  |
| NVIDIA Tesla<br>(4 ускорителя) | 0,92         | 3,9       | 0,98  |

ТАБЛИЦА 2

## Решение задачи методом ЛМСГ

| Вычислитель                    | $T_m$ , мин. | $S_m$ (S) | $E_m$ |
|--------------------------------|--------------|-----------|-------|
| Intel Xeon (1 ядро)            | 151          | -         | -     |
| Intel Xeon (8 ядер)            | 21           | 7,2       | 0,9   |
| NVIDIA Tesla<br>(1 ускоритель) | 2,5          | -         | -     |
| NVIDIA Tesla<br>(2 ускорителя) | 1,28         | 1,96      | 0,98  |
| NVIDIA Tesla<br>(4 ускорителя) | 0,64         | 3,91      | 0,98  |

**Заключение**

На основе линеаризованных методов градиентного типа для решения структурной обратной задачи магнитометрии разработаны параллельные алгоритмы, численно реализованные на многопроцессорных вычислительных системах различного типа: графических процессорах NVIDIA Tesla и многоядерном процессоре Intel Xeon с высокой эффективностью распараллеливания с использованием вычислительных технологий OpenMP и CUDA. Проведена оптимизация параллельных алгоритмов. Решена модельная задача для трехслойной среды. Результаты вычислений показывают, что

использование линеаризованных итерационных методов градиентного типа при решении структурных обратных задач магнитометрии для трехслойной среды позволяет получать корректные решения. Метод сопряженных градиентов сокращает число итераций по сравнению с методом наискорейшего спуска. Применение параллельных алгоритмов при решении обратных задач магнитометрии на многопроцессорных вычислительных системах существенно уменьшает время счета.

### Список литературы

- [1] Малкин Н.Р. О решении обратной магнитометрической задачи для случая одной контактной поверхности (случай пластообразно залегающих масс) // ДАН СССР. Сер. А. 1931. № 9. С. 232–235.
- [2] Bakushinsky A., Goncharsky A. Ill-Posed Problems: Theory and Applications. London: Kluwer Akad. Publ., 1994.
- [3] Васин В. В., Еремин И. И. Операторы и итерационные процессы фейеровского типа. Теория и приложения. Екатеринбург: УрО РАН. 2005.
- [4] Мартышко П. С., Пруткин И. Л. Технология разделения источников гравитационного поля по глубине // Геофизический журнал. 2003. Т. 25. № 3. С. 159–168.
- [5] Акимова Е. Н., Мартышко П. С., Мисилов В. Е. Алгоритмы решения структурной задачи гравиметрии в многослойной среде // ДАН. 2013. Т. 453. № 6. С. 1-5.
- [6] Gilbert J. C., Nocedal J. Global convergence properties of conjugate gradient methods for optimization // SIAM Journal on optimization. 1992. 2(1). 21-42.
- [7] Акимова Е. Н., Белоусов Д. В., Мисилов В. Е. Алгоритмы решения обратных геофизических задач на многопроцессорных вычислительных системах // Сибирский журнал вычислительной математики. 2013. Т. 6. № 2. С. 107–121.

*Об авторах:*

**Акимова Елена Николаевна**

Доктор физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник отдела некорректных задач анализа и приложений Института математики и механики УрО РАН, проф. кафедры Выч. методов и уравнений мат. физики Уральского федерального университета.

*e-mail: aen15@yandex.ru*

**Мисилев Владимир Евгеньевич**

Аспирант Института математики и механики УрО РАН, вед. программист отдела некорректных задач анализа и приложений Института математики и механики УрО РАН.

*e-mail: out.mrscreg@gmail.com*

**Третьяков Андрей Игоревич**

Магистрант Уральского федерального университета, программист отдела некорректных задач анализа и приложений Института математики и механики УрО РАН.

*e-mail: fr1z2rt@gmail.com*

E. N. Akimova, V. E. Misilov, A. I. Tretyakov Methods for solving inverse magnetic problem of finding media interfaces on Uran super-computer.

ABSTRACT. Iterative gradient-type methods with weight factors for solving the three-dimensional structural inverse magnetic problem of finding media interfaces between layers with constant magnetization in multilayer medium are considered.

Effective parallel algorithms based on this methods were implemented numerically on the multicore and graphics processors incorporated in Uran super-computer. Research of effectiveness and optimization of parallel algorithms was carried out.

*Key Words and Phrases:* Inverse magnetic problem, iterative methods, parallel algorithms, multiprocessor computing systems.