УДК 519.7

СИМВОЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ В РАСПРЕДЕЛЕННОЙ КОМПЬЮТЕРНОЙ СРЕДЕ ДЛЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ОДНИМ КЛАССОМ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ПО КВАДРАТИЧНОМУ КРИТЕРИЮ[1]

© 2014 г. А. П. Афанасьев*, С. М. Дзюба, И. И. Емельянова****

*(*127994, Москва, Большой Каретный переулок, 19, стр. 1, ИППИ РАН;*

***170026, Тверь, наб. Афанасия Никитина, 22, ТвГТУ)*

*e-mail: *apa@isa.ru; **sdzyuba@mail.ru*

Приведен метод синтеза оптимального управления с обратной связью одним классом нелинейных систем по квадратичному критерию. Данный метод базируется на специальном методе последовательных приближений, сходимость которого позволяет доказать существование оптимального управления и получить процедуру его построения. Реализация процедуры осуществляется с помощью символьных вычислений в распределенной среде.

Ключевые слова: метод последовательных приближений, локальная задача оптимального управления нелинейной системой по квадратичному критерию, субоптимальное управление на произвольном конечном горизонте, символьные вычисления в распределенной среде.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим нелинейную динамическую систему, характеризуемую дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = Ax + Bu + f(x, u), \tag{1.1}$$

в котором $x = (x^1, \ldots, x^n)$ – n-мерный действительный вектор состояния, $u = (u^1, \ldots, u^m)$ – m-мерный действительный вектор управления, A и B

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 12-01-00961, 13-07-00077).

– действительные $(n\times n)$- и $(n\times m)$-матрицы, а $f=(f^1,\dots,f^n)$ – векторная функция, определенная и непрерывная вместе со своими частными производными

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^j},\quad i,j=1,\dots,n,$$

и

$$\frac{\partial f^i}{\partial u^j},\quad i=1,\dots,n,\quad j=1,\dots,m,$$

в пространстве $\mathbb{R}^{n+m}$.

Предположим, что начальное состояние

$$x(0)=c \tag{1.2}$$

задано, а задача управления системой (1.1) заключается в минимизации функционала

$$J(u)=\frac{1}{2}\int\limits_0^T[\langle e(t),Qe(t)\rangle+\langle u(t),Ru(t)\rangle]\,dt+\frac{1}{2}\langle e(T),Pe(T)\rangle, \tag{1.3}$$

в котором T – фиксированное конечное время, Q и P – положительные полуопределенные $(n\times n)$-матрицы, R – положительно определенная $(m\times m)$-матрица,

$$e(t)=x(t)-z(t)$$

– ошибка системы и $z=(z^1,\dots,z^n)$ – заданный режим функционирования.

Легко видеть, что непосредственное применение принципа максимума Л.С. Понтрягина к рассматриваемой задаче приводит к достаточно сложной краевой задаче, если только (1.1)–(1.3) не сводится к линейно-квадратичной задаче слежения (см., например, [1, с. 657]). Однако, во многих практических ситуациях режим $z(t)$ устроен так, что указанное сведение невозможно.

В общем случае для получения решения (или оценок решения) задачи (1.1)–(1.3) используют самые разные методы (см., например, [2, гл. 18] и [3–9]). Одним из основных методов здесь является метод последовательных приближений, описанный в [2, гл. 18]. Внешне простой и понятный, он (метод) сводит исходную задачу к некоторой последовательности линейно-квадратичных задач. Вместе с тем, указанный метод до сих пор не получил широкого распространения, поскольку его сходимость не доказана. Последнее, в частности, объясняется тем, что здесь в схеме последовательных приближений оператор системы меняется от итерации к итерации.

Целью настоящей работы является получение решения задачи (1.1)–(1.3) в виде закона управления с обратной связью. Для получения искомого решения используется процедура, являющаяся модификацией метода [2, гл. 18] и заключающаяся в создании некоторой специальным образом генерируемой последовательности вспомогательных линейно-квадратичных задач. Это позволяет в некоторых случаях установить сходимость метода, а из сходимости доказать существование оптимального управления и получить процедуру его построения. Предлагается также реализация метода с помощью символьных вычислений в распределенной компьютерной среде в случае функции f, являющейся многомерным многочленом переменных x, u.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Формально опишем метод последовательных приближений, на котором будут базироваться все дальнейшие построения.

Следуя [9], для всех $N = 0, 1, \ldots$ рассмотрим вспомогательную задачу о минимизации функционала

$$J_{N+1}(u) = \frac{1}{2}\int_0^T [\langle e(t), Qe(t)\rangle + \langle u(t), Ru(t)\rangle]\, dt + \frac{1}{2}\langle e(T), Pe(T)\rangle \tag{2.1}$$

с ограничением

$$\dot{x} = Ax + Bu + f(x_N, u_N), \quad x(0) = c, \tag{2.2}$$

где x_N и u_N – некоторые функции, определенные и непрерывные на отрезке $[0, T]$.

Для фиксированных x_N и u_N оптимальное управление $u_{N+1}(t)$ в задаче (2.1), (2.2) дается законом управления с обратной связью

$$u_{N+1}(t) = R^{-1}B'[h_{N+1}(t) - K(t)x_{N+1}(t)], \tag{2.3}$$

в котором $x_{N+1}(t)$ – решение уравнения (2.2), соответствующее $u_{N+1}(t)$ и удовлетворяющее начальному условию

$$x_{N+1}(0) = c,$$

$K(t)$ – решение матричного дифференциального уравнения Риккати

$$\dot{K}(t) = -K(t)A - A'K(t) + K(t)BR^{-1}B'K(t) - Q \tag{2.4}$$

с граничным условием

$$K(T) = P, \tag{2.5}$$

а $h_{N+1}(t)$ – решение линейного дифференциального уравнения

$$\dot{h}_{N+1}(t) = -[A - BR^{-1}B'K(t)]'h_{N+1}(t) - Qz(t) + K(t)f(x_N(t), u_N(t)) \tag{2.6}$$

с граничным условием

$$h_{N+1}(T) = Pz(T) \tag{2.7}$$

(см. [1, с. 699]).[2]

Таким образом, если начальное приближение $x_0(t), u_0(t)$ задано, то соотношения (2.1)–(2.7) определяют схему последовательных приближений, которая, как будет показано ниже, при всех достаточно малых значениях T позволяет установить существование решения задачи (1.1)–(1.3) и дает эффективную процедуру построения этого решения. Отметим также, что для простоты начальное приближение здесь будет определено соотношениями

$$x_0(t) \equiv c \tag{2.8}$$

и

$$u_0(t) \equiv R^{-1}B'[Pz(T) - K(t)c]. \tag{2.9}$$

Замечание 1. Автономность системы (1.1) и постоянство матриц Q и R в настоящей работе нигде не используются и приняты для простоты обозначений.

3. ПОСТРОЕНИЕ УПРАВЛЕНИЯ

Применим метод (2.3)–(2.9) для изучения простейшего варианта задачи (1.1)–(1.3), в котором значение T предполагается достаточно малым. Такую задачу будем называть локальной.

Существование и структуру оптимального управления в локальной задаче (1.1)–(1.3) устанавливает следующая

[2]Здесь в книге [1] имеет место очевидная опечатка.

Теорема 1. *Пусть c – произвольная точка пространства $\mathbb{R}^n$. Тогда найдется такое положительное число $\mathfrak{T}$, что для всех $T \in (0, \mathfrak{T})$ существует оптимальное управление $u^*(t)$ в задаче (1.1)–(1.3). При этом для всех $t \in [0, T]$*

$$u^*(t) = R^{-1}B'[h^*(t) - K(t)x^*(t)], \tag{3.1}$$

где $x^*(t)$ – решение уравнения

$$\dot{x}^* = Ax^* + Bu^* + f(x^*, u^*) \tag{3.2}$$

с начальным условием

$$x^*(0) = c, \tag{3.3}$$

а $h^*(t)$ – решение уравнения

$$\dot{h}^*(t) = -[A - BR^{-1}B'K(t)]'h^*(t) - Qz(t) + K(t)f(x^*(t), u^*(t)) \tag{3.4}$$

с граничным условием

$$h^*(T) = Pz(T). \tag{3.5}$$

Доказательство теоремы 1 в настоящей работе опускается, поскольку оно во многом совпадает с доказательством основной теоремы работы [9].

Переходя к рассмотрению общего случая задачи (1.1)–(1.3) с произвольным конечным горизонтом, заметим, что справедлива

Теорема 2. *Для всех $t \in [0, T]$ и $N = 0, 1, \dots$ положим*

$$\varphi_N(t) = (x_N(t), h_N(t))$$

и рассмотрим последовательность функций

$$\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_N, \dots, \tag{3.6}$$

определенных и непрерывных на отрезке $[0, T]$. Предположим, что последовательность (3.6), сгенерированная методом (2.3)–(2.9), равномерно ограничена. Тогда множество

$$\Omega(\varphi_0) = \bigcap_{N \geq 0} \overline{\bigcup_{k \geq N} \varphi_k}$$

непусто, компактно в топологии равномерной сходимости и инвариантно. При этом имеет место равенство

$$\Omega(\varphi_0) = \lim_{N\to+\infty} \varphi_N. \tag{3.7}$$

Доказательство. Поскольку множество (3.6) равномерно ограничено, то непустота множества $\Omega(\varphi_0)$ очевидна. При этом в силу равенств (2.2), (2.3) и (2.6) несложно заметить, что функции семейства

$$\dot\varphi_0, \dot\varphi_1, \ldots, \dot\varphi_N, \ldots \tag{3.8}$$

непрерывны на отрезке $[0, T]$, а само семейство (3.8) еще и равномерно ограничено. Следовательно, множество (3.6) равностепенно непрерывно (см., например, [10, с. 325]). Сказанное означает, что множество (3.6) относительно компактно в топологии равномерной сходимости (см., например, [11, с. 489]). Отсюда вытекают компактность множества $\Omega(\varphi_0)$ в топологии равномерной сходимости, его инвариантность и равенство (3.7) (см. [12, с. 101–103]).

Таким образом, теорема 2 доказана.

Следствие. *Предположим, что в условиях теоремы 2 множество $\Omega(\varphi_0)$ состоит из единственной функции φ^*. Тогда в задаче (1.1)–(1.3) существует оптимальное управление $u^*(t)$, удовлетворяющее равенствам (3.1)–(3.5).*

Доказательство следствия в силу равенства (3.7) фактически повторяет доказательство второй части основной теоремы работы [9]. Поэтому здесь оно опускается.

Замечание 2. Каждое компактное инвариантное множество, как известно, содержит компактное минимальное множество (см., например, [13, с. 401]). Поэтому в условиях теоремы 2 множество $\Omega(\varphi_0)$ содержит компактное минимальное множество $\mathfrak{M}$.

Если $\varphi_{\mathfrak{M}} = (x_{\mathfrak{M}}, h_{\mathfrak{M}})$ – произвольная функция множества $\mathfrak{M}$, то в силу теорем 1 и 2 несложно заметить, что закон управления

$$u(t) = R^{-1}B'[h_{\mathfrak{M}}(t) - K(t)x(t)]$$

в любом случае можно считать хорошим приближением к решению задачи (1.1)–(1.3).

Отметим также, что в силу следствия теоремы 2 сходимость метода (2.3)–(2.9) устанавливает существование решения задачи (1.1)–(1.3) и вид оптимального управления.

4. РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА

Рассмотрим проблему реализации предложенного выше метода (2.3)–(2.9) для задачи (1.1)–(1.3) с функцией f, являющейся многомерным многочленом переменных x, u. При этом для простоты ограничимся случаем сходящейся последовательности (3.6) и предполагаемой аппроксимацией функции $z(t)$ некоторым многочленом.

Прежде всего, заметим, что первым шагом в реализации метода является построение решения уравнения Риккати (2.4) с граничным условием (2.5). Данное уравнение, как легко видеть, является уравнением с полиномиальной правой частью. Поэтому для построения его приближенного аналитического решения можно воспользоваться специальным методом работы [14].

Метод из [14] использует процедуру многократного символьного интегрирования многомерных многочленов. В результате приближенное аналитическое решение уравнения (2.4) удается построить в виде многомерного многочлена времени t и элементов матрицы P (см. (2.5)). Более того, данное приближенное решение всегда удается построить с наперед заданной точностью. При этом само построение использует размещенные в распределенной компьютерной среде сервисы символьного интегрирования и символьного умножения многомерных многочленов.

Следующим шагом реализации метода (2.3)–(2.9) является построение оптимального закона управления. Согласно следствию теоремы 2 данное построение предполагает осуществление предельного перехода для решений последовательности двухточечных краевых задач (2.2), (2.6), (2.7), в которых соответствующие дифференциальные уравнения связаны между собой функцией (2.3).

Для построения решения этой задачи рассмотрим задачу Коши (2.2), (2.6), в которой граничное условие (2.7) заменим начальным условием

$$h(0) = d. \tag{4.1}$$

На каждом шаге метода последовательных приближений (2.3)–(2.9) дифференциальные уравнения (2.2) и (2.6) в задаче (2.2), (2.6), (4.1) являются линейными, причем время t входит в правые части этих уравнений в виде многочленов. Поэтому для получения решения этой задачи также можно использовать метод работы [14].

Используя метод из [14], приближенное аналитическое решения задач (2.2), (2.6), (4.1) всегда можно получить с наперед заданной точностью

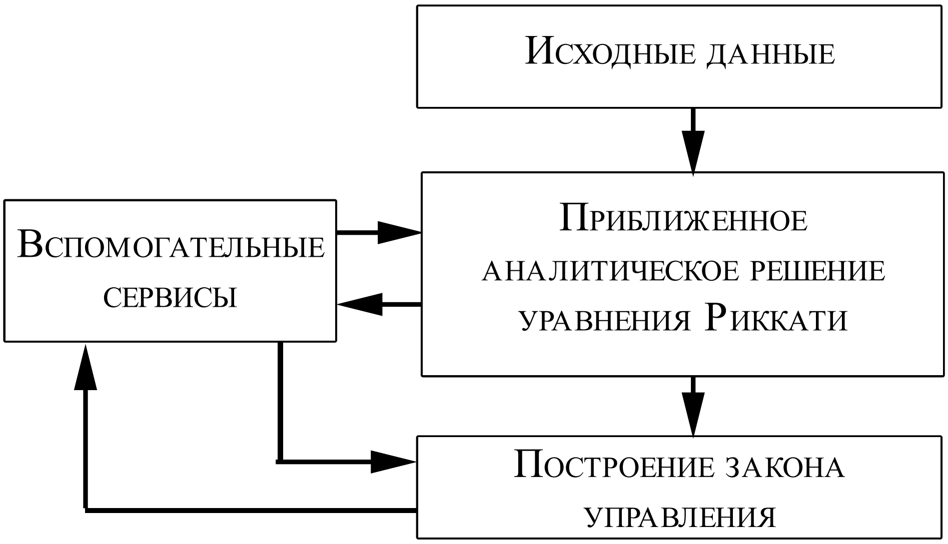

Рис. 1: Реализации метода (2.3)–(2.9) с помощью сервисов символьных вычислений, размещенных в распределенной компьютерной среде.

в виде многомерного многочлена переменных t, c, d. Последнее, очевидно, позволяет избежать весьма сложной процедуры построения решения двухточечных краевых задач (2.2), (2.6), (2.7) за счет выбора вектора d в начальном условии (4.1), обеспечивающего выполнение граничного условия (2.7).

Таким образом, метод последовательных приближений (2.3)–(2.9) достаточно просто реализуется в распределенной компьютерной среде с использованием сервисов символьного интегрирования и символьного умножения многомерных многочленов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Атанс М., Фалб П.* Оптимальное управление. М.: Машиностроение, 1968.

2. *Беллман Р.* Процессы регулирования с адаптацией. М.: Наука, 1964.

3. *Lukes D.L.* Optimal regulation of nonlinear systems // SIAM J. Control Optim. 1969. Vol. 7. P. 75–100.

4. *Yamamoto Y.* Optimal control of nonlinear systems with quadratic performance // J. Math. Anal. Appl. 1978. Vol. 64. P. 348–353.

5. *Dacka C.* On the controllability of a class of nonlinear systems // IEEE Trans. Automat. Control. 1980. Vol. 25. P. 263–266.

6. *Balachandran K., Somasundaram D.* Existence of optimal control for nonlinear systems with quadratic performance // J. Austral. Math. Soc. Ser. B. 1987. Vol. 29. P. 249–255.

7. *Afanas'ev A.P., Dzyuba S.M., Lobanov S.M., Tyutyunnik A.V.* Successive approximation and suboptimal control of systems with separeted linear part // Appl. Comp. Math. 2003. Vol. 2. No. 1. P. 48–56.

8. *Afanas'ev A.P., Dzyuba S.M., Lobanov S.M., Tyutyunnik A.V.* On a suboptimal control of nonlinear systems via quadratic criteria // Appl. Comp. Math. 2004. Vol. 3. No. 2. P. 158–169.

9. Афанасьев А.П., Дзюба С.М. Об оптимальном управлении нелинейными системами по квадратичному критерию // Тр. ИСА РАН. 2008. Т. 32. С. 49–62.

10. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.

11. *Шварц Л.* Анализ. Т. 2. М.: Мир, 1972.

12. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.

13. *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.: Едиториал УРСС, 2004.

14. *Афанасьев А. П., Дзюба С. М., Кириченко М. А., Рубанов Н. А.* Приближенное аналитическое решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений с полиномиальной правой частью // ЖВМ и МФ. 2013. Т. 53. № 2. С. 321–328.