

УДК 544.032.65:621.373.826+004.942

Хоменко М.Д., Мирзаде Ф.Х., Низьев В.Г.

## Использование параллельных вычислений в задачах моделирования лазерной наплавки

Аннотация. Для численного исследования микроструктуры наплавленного слоя при лазерной наплавке требуется совместно решать дифференциальное уравнение теплопроводности с интегральным уравнением Колмогорова-Джонсона-Мейла-Аврами (КЖМА). Задачу оптимизации параметров невозможно решить без применения суперкомпьютерных технологий. В данной работе исследуется эффективность некоторых вариантов параллельной программы для расчета микроструктуры. Показана возможность масштабирования задачи на 180 процессоров с использованием метода Якоби. В итоге за реальное время удалось решить сложную интегродифференциальную систему уравнений для моделирования микроструктуры при лазерной наплавке.

*Ключевые слова и фразы:* Численное моделирование, лазерная наплавка, метод Якоби

### Введение

В настоящее время численному моделированию селективного лазерного спекания (СЛС) металлических порошков уделяется повышенное внимание (Gladush, и др., 2011; Шишковский, 2009). Для получения высококачественного конечного изделия необходим оптимальный выбор условий проведения технологического процесса.

© ХОМЕНКО М.Д., МИРЗАДЕ Ф.Х., НИЗЬЕВ В.Г., 2014

© ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ ЛАЗЕРНЫХ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК (ИПЛИТ РАН), 2014

© ПРОГРАММНЫЕ СИСТЕМЫ: ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ, 2014

Огромное значение имеют, как параметры лазерного излучения (мощность излучения, размер пятна фокусировки, временные характеристики, скорость сканирования луча), так и параметры потока частиц (скорость потока, концентрация и размеры частиц, физические и химические свойства порошка). Эти параметры определяют качество и микроструктурные свойства наплавливаемых слоев. Большинство исследований эволюции микроструктуры основано на анализе экспериментальных работ (Pei, и др., 2000; Dinda, и др., 2012), однако эмпирический подбор параметров крайне затруднителен и трудоёмок. Задача поиска оптимальных режимов проведения процесса для достижения целевых параметров материала и изделия требует более глубокого понимания физических процессов и явлений и разработки физико-математических моделей с применением численных методов. Численный поиск оптимальных параметров связан с огромным количеством численных экспериментов и часто не возможен без применения суперкомпьютерных технологий и параллельных вычислений.

Математические модели селективного лазерного спекания развиваются уже много лет (Gladush, и др., 2011; Шишковский, 2009) от простых аналитических оценок, до трехмерных численных моделей, учитывающих практически каждый из многочисленных процессов, происходящих в расплаве (Wen, и др., 2010). Температурный режим порошка, который попадает на подложку, является важным параметром процесса (Гришаев, et al., 2011), и может быть учтен при расчете тепловых полей расплава (Гришаев, et al., 2013). Не смотря на то, что технология исследуется давно, до сих пор недостаточное внимание уделено процессу кристаллизации и микроструктуре синтезируемого материала. В существующих согласованных моделях кристаллизация учитывается по упрощенной схеме (Wen, и др., 2010; Неа, и др., 2011), а более сложные модели решаются не согласованно с температурным полем и профилем наплавленного слоя (Cao, et al., 2006).

Численное исследование микроструктуры наплавленных слоев при ЛН, с учетом влияния сопряженных процессов переноса тепла

и фазовых превращений (плавления/кристаллизации) требует решения сложной интегро-дифференциальной системы уравнений (Mirzade, et al., 2013; Хоменко, et al., 2015, в печати). Решение такой системы занимает значительное время и невозможно без применения параллельных алгоритмов. Для этого требуется создание хорошо масштабируемой программы расчета. Целью настоящей работы является исследование нескольких вариантов параллельного решения задачи.

Универсальная явная схема прекрасно масштабируется, однако имеет известное ограничение на шаг по времени и поэтому используется редко. Для достижения сверхвысокой масштабируемости на компьютерах экзафлопсного класса требуются специальные схемы (Жуков, и др., 2014). В случае числа процессоров не превышающего 250 проблема масштабирования выражена не так явно. Поэтому имеет смысл использовать оптимально масштабируемое для имеющегося числа процессоров решение, такое как связка неявной схемы и итерационного метода решения.

## 1. Физическая модель

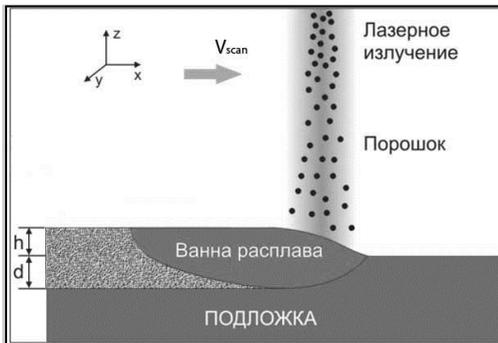


Рисунок 1. Схема лазерной наплавки

Процесс СЛС с инжекцией порошка схематически показан на Рис. 1. В начальный момент времени на твердую поверхность мишени падает лазерный луч, движущийся от некоторой точки  $x_0$  в положительном направлении оси  $x$  со скоростью  $V_{scan}$ . Считаем,

что твердая фаза контактирует с газом. Одновременно, в область воздействия лазерного излучения (ЛИ) газовым потоком вносятся монодисперсные частицы однокомпонентного порошка с

начальным радиусом  $r_{p0}$  и температурой  $T_0$ . Лазерное излучение, проходящее сквозь поток частиц, селективно поглощается и рассеивается движущимися частицами порошка, а также поглощается и рассеивается на поверхности металлической подложки. Поглощенная частицами энергия тратится на их нагревание и расплавление и за вычетом потерь тепла на теплопроводность и радиационное охлаждение. Энергия, поглощенная поверхностью и перенесенная на поверхность частицами, расходуется на нагревание поверхностного слоя мишени.

## 2. Основные уравнения

Для моделирования переноса тепла и движения свободной границы используются следующие уравнения (Mirzade, и др., 2013; Хоменко, и др., 2015; Гришаев, и др., 2013):

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(\lambda \nabla T) + q\delta(\varphi) + \rho(1 - f_l)\Delta c \frac{\partial T}{\partial t} - \rho L \frac{\partial f_l}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + F |\nabla \varphi| = 0, \quad (2)$$

$$F = \alpha \frac{8\dot{m}}{\pi\rho_p d_j^2} \exp\left(-\frac{8 \cdot r^2}{d_j^2}\right) + \vec{n} \cdot \vec{U}(x, y, z, t),$$

где  $c, \lambda$  и  $\rho$  - теплоемкость, теплопроводность и плотность среды соответственно,  $L$  - теплота плавления  $f_l(x, y, z, t) = M_l / M_0$  - массовая доля жидкой фазы, образовавшейся/исчезнувшей в точке к моменту времени  $t$  ( $M_0$  и  $M_l$  - соответственно масса всего расплава и жидкой фазы;  $f_l = 0$  для твердой фазы,  $f_l = 1$  для полностью превратившей фазы и для двухфазной зоны может изменяться от нуля до единицы).  $\varphi(x, y, z, t) = \pm d$  - расстояние от текущей точки до свободной границы,  $F$  - скорость роста, действующая перпендикулярно границы металла, первое слагаемое отвечает за движение границы металла за счет инъекции частиц порошка,  $\vec{n}$  -

нормаль к поверхности,  $U$  - локальное гидродинамическое движение частиц жидкого металла,  $\alpha$  - эффективность захвата частиц порошка поверхностью,  $\dot{m}$  - скорость подачи порошка,  $\rho_p$  - плотность порошка,  $d_j$  - диаметр струи порошка. Для слежения за свободной границей используется метод функции уровня (Osher, et al., 2003). В (1)-(2) учтено действие лазерного источника  $q$  и выделение/поглощение тепла вследствие фазового перехода. Здесь мы полагаем, что влияние течения жидкости можно учесть вводом эффективной теплоемкости. Заметим, что последнее оправдано, если толщина слоя расплавленного металла достаточно мала.

Уравнения (1)-(2) дополняются кинетическим уравнением КЖМА, устанавливающим связь между объемными долями новой фазы и кинетическими характеристиками процесса кристаллизации (скорости зарождения и роста кристаллитов).

В теории КЖМА объемная доля закристаллизованной области подчиняется уравнению

$$b(t) = 1 - \exp \left\{ -\sigma \int_0^t J(\tau) \left( r^* + \int_\tau^t G(\tau, t) d\tau \right)^n d\tau \right\} \quad (3)$$

Формула (3) проверена многочисленными численными экспериментами (Sessa, et al., 1996; Ramos, et al., 1999) по методу Монте-Карло.

Расчетная область разбивается на изотермические участки в которых рассчитывается объемная доля новой фазы. Скорость зародышеобразования и роста внутри каждой ячейки постоянна, и зависит только от времени. При этом для расчета новой фазы используется концентрация частиц, а не конкретный объем ячейки. Способ решения уравнения (3), в приближении среднего поля описан в (Cesro, et al., 1996) для однородной температуры кристаллизующейся системы.

Уравнения (1)-(3) решались в расчетной области, которая содержит три фазы: твердую, жидкую и газ. Для отслеживания границы L-V используется метод функций уровня. Сетка не равномерна по всем координатам - сгущается в области ванны расплава и лазерного пятна для увеличения точности определения границ ванны расплава и расчета фазовых переходов, а так же поглоще-

ния лазерного излучения. Использовались различные размеры расчетной области от 6мм\*4мм\*2мм до 34мм\*8мм\*16мм в зависимости от входных параметров. Главным правилом выбора промежутка времени было то, что бы все процессы выходили на квазистационарное состояние. Расчетная область моделирует половину реальной области за счет симметрии. В трехмерном случае использовалась сетка порядка 576\*100\*180 точек. Положение лазерного источника в начале процесса соответствует одной четверти расчетной области по координате  $x$ . Шаг по времени подбирается таким образом, чтобы граница металла не сдвигалась больше, чем минимальный шаг пространственной сетки, и в среднем составляет 0,2-0,4 мс в зависимости от использованной сетки. Скорость зародышеобразования, которая используется для расчета микроструктуры, является резкой функцией температуры, что так же накладывает ограничение на размер шага по времени.

Для решения уравнения теплопроводности используется хорошо описанный в литературе метод стабилизирующей поправки, который имеет второй порядок точности по времени и пространству (Douglas, и др., 1956; Самарский, и др., 2009; Патанкар, 1984). Влияние фазовых переходов на температурные поля учитывается в уравнении теплопроводности источником членом (Voller, et al., 1991). Аппроксимированное на трехмерной дискретной сетке уравнение теплопроводности имеет вид:

$$\rho(c_i - \Delta c(1 - f_i)) \frac{U^{+1/3} - U^-}{dt} = \frac{1}{2} \Lambda_1 (U^{+1/3} + U^-) + \Lambda_2 U^- + \Lambda_3 U^- + S_{las} - \rho L \frac{f_i - f_i^-}{dt}, \quad (4)$$

$$\rho(c_i - \Delta c(1 - b)) \frac{U^{+1} - U^{+2/3}}{dt} = \frac{1}{2} \Lambda_3 (U^{+1} - U^-), \quad (5)$$

$$\rho(c_i - \Delta c(1 - b)) \frac{U^{+2/3} - U^{+1/3}}{dt} = \frac{1}{2} \Lambda_2 (U^{+2/3} - U^-), \quad (6)$$

$$\Lambda_i = \frac{k}{di_{-i} + di_{+i}} \left( \frac{k_{+i}}{k_{+i} + k} \frac{U_{+i} - U}{di_{+i}} - \frac{k_{-i}}{k_{-i} + k} \frac{U - U_{-i}}{di_{-i}} \right), \quad (7)$$

$i = x, y, z$

где верхние дробные индексы соответствуют промежуточным временным слоям, индекс "+1" следующему временному слою, а "-" предыдущему. Нижние индексы относятся к пространственной сетке. Для фазовых переходов рассчитывался интеграл по всей температурной истории в каждой точке. Фазовый переход занимает от 10 до 50 шагов по времени. Уравнение для функции уровня решались явно в каждой точке расчетной области. Для согласования уравнений использовался метод простой итерации. Чтобы добиться сходимости уравнений для температуры использовалась нижняя релаксация с коэффициентом  $n$ . Значение  $n = 0.7$  дает оптимальное соотношение между количеством итераций и шагов по времени. Как правило требовалось 4-5 итераций для того чтобы невязка стала меньше заданного значения  $\sigma < 0.1$ . Невязка рассчитывалась по максимальному изменению температуры в расчетной области за одну итерацию:

$$\sigma = \max(U^i - U^{i-1}) \quad (8)$$

### 3. Параллельная реализация

Для трехмерного расчета наплавки использовались сетки, содержащие  $6 \cdot 10^6$  точек. Для каждой из точек сетки выполняются следующие расчеты:

1. Расчет физических коэффициентов (Eval. Coef.)
2. Расчет матрицы левой и вектора правой части (Eval. Diag.)
3. Решение системы уравнений  $A \cdot x = b$
4. Расчет уравнения для количества новой фазы (интегральное уравнение по температурной истории точки) (Integral)
5. Расчет невязки итерационного согласования температуры и новой фазы

Как показано в предыдущем параграфе в работе используются экономичные разностные схемы (Яненко, 1967). Такие схемы разбивают решение трехмерного уравнения на три последовательных хода по каждой из координат (4)-(7), что дает в итоге три трехдиагональные системы уравнений. Решение трехдиагональной системы уравнения для миллионных сеток, в принципе, возможно без при-

влечения суперкомпьютерных вычислений за реальное время. Однако итерационное согласование такой системы с интегральным уравнением делает задачу неподъемной для последовательного решения. Заметим так же, что масштабируемость такого метода будет ограничена количеством точек по одной из координат.

Интегральное уравнение может решаться совершенно независимо для каждой точки, поэтому практически идеально масштабируется в параллельной системе и узким местом параллельно реализованной программы расчета будет решение трехдиагональной системы и расчет невязки итерационного согласования. Известно, что для решения трехдиагональных СЛАУ эффективнее всего использовать метод прогонки. В случае хода прогонки по определенной координате зависимость по данным будет только по этой координате, что дает количество независимых трехдиагональных систем равное произведению числа точек по оставшимся координатам  $n_{ур} * n_{зр}$ . На следующем шаге метода стабилизирующей поправки независимых СЛАУ будет  $n_{хр} * n_{зр}$ , однако, распределенные по данным по  $x$  придется перераспределять  $y$ . Это связано с межпроцессорной пересылкой и занимает значительное время, так что имеет смысл распределять данные только по одной координате, а прогонку использовать по остальным координатам. Однако на одном из трех этапов метода стабилизирующей поправки остается зависимость данных по распределенной координате и метод прогонки не эффективен. Поэтому для распределенного направления имеет смысл использовать другой метод.

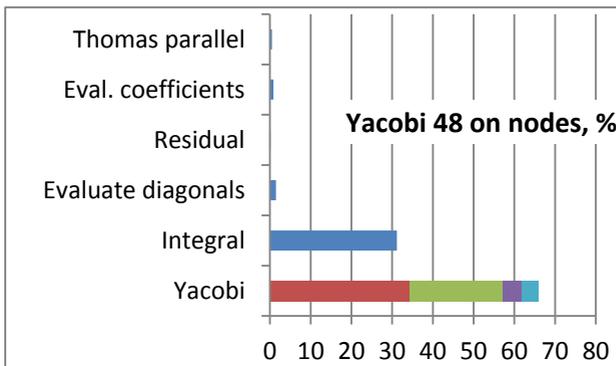
Самым простым итерационным методом решения СЛАУ является метод Якоби. У этого метода в отличие от метода Гаусса-Зейделя нет зависимости по данным. Поэтому в случае применимости (наличие строгого диагонального преобладания) он является эффективным методом расчета. Расчет температуры на текущем временном слое идет полностью не зависимо по известным данным предыдущего слоя. Синхронизация требуется только для расчета невязки, а для расчета следующего шага - обмен граничными значениями (на внутри-процессорных границах). Несколько реали-

заций метода Якоби показаны в (Bethune, et al., 2011). В данной работе используется синхронный вариант, который все же показал хорошую масштабируемость. Синхронизация всех процессоров потребовалась только для расчета невязки, а граничными точками обменивались только соседние процессоры.

В работе использовались следующие методы решения.

1. Последовательный метод прогонки по 1 координате
2. Последовательная прогонка по 3 координате
3. Метод Якоби по 1 координате
4. Метод Якоби по 3 координате
5. Последовательное решение СЛАУ и параллельное решение интеграла

Для расчета СЛАУ по той или иной координате используется либо пересылка всех данных на один процессор расчет последовательным методом прогонки и последующая рассылка всем полученного решения, либо метод Якоби. Расчет СЛАУ по остальным координатам проводится методом прогонки независимо на каждом узле. Далее параллельно рассчитывается интегральное уравнение.



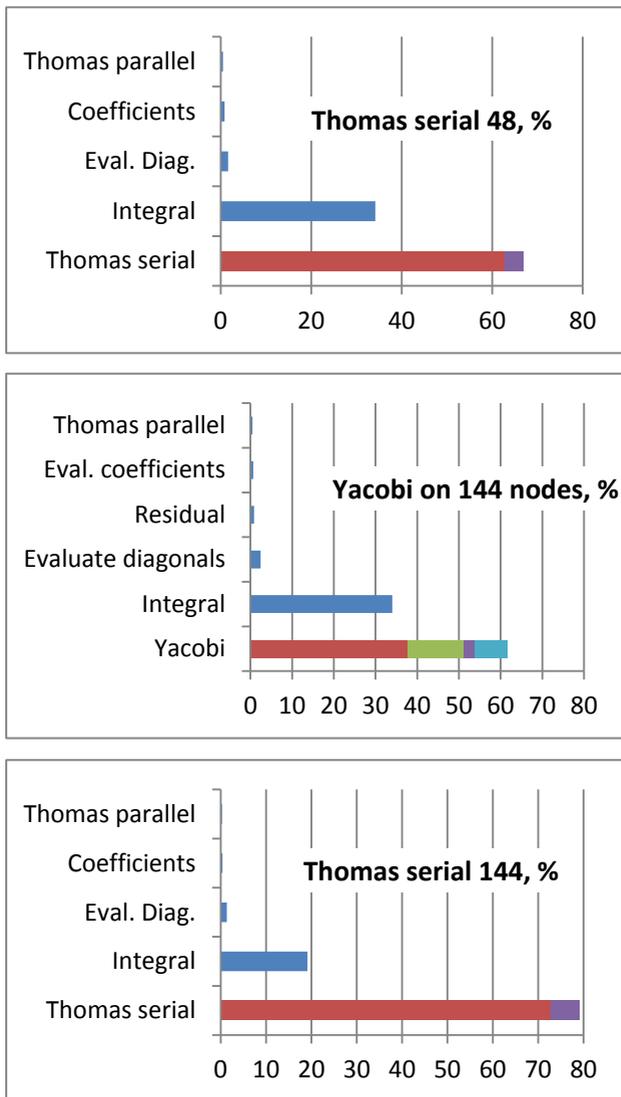


Рис. 2. Значение времени (нормированное на суммарное), которое занимают функции для различных методов при распараллеливании на 48 и 144 ядра. Для метода Якоби показано, сколько занимает синхронизация (красный), обмен гранич-

ными точками (зеленый), расчет уравнения (фиолетовый), и остальное (голубой). Для метода последовательной прогонки - сколько занимает сбор и рассылка данных (красный) и расчет (фиолетовый).

Для анализа производительности метода проводились тестовые расчеты, и замерялось время как полного расчета так его частей. Использовалось 10 или 20 шагов по времени с 2 или 4 итерациями на каждом. Суммарное значение количества шагов по времени 5000 позволяет оценить время всего расчета.

Метод Якоби проигрывает в эффективности прогонке на маленьком числе ядер. Как видно из рисунка 2 время распределено не одинаково в случае распределения на 48 и 144 узла. В первом случае расчет температуры занимает большее время, чем во втором, но в целом больше всего времени занимает синхронизация. В среднем метод Якоби сходится за примерно одно и то же число итераций, поэтому эмпирический подбор минимального числа итераций после которого начинается синхронизация, позволил увеличить эффективность метода примерно на 30%. Это однако не решает проблему синхронизации совсем потому что большую часть времени тратится на первую синхронизацию, а остальные итерационные шаги проходят практически без ожидания.

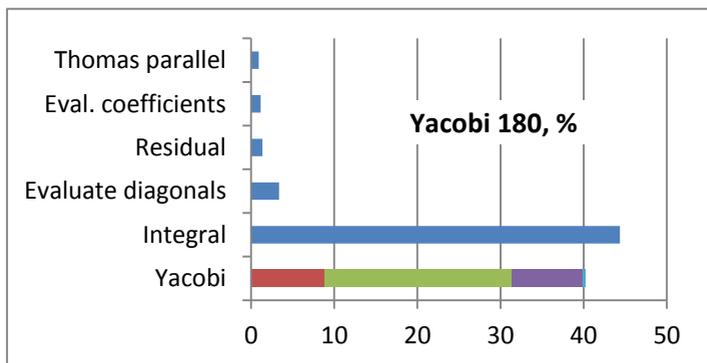


Рис. 3. Значение времени (нормированное на суммарное), которое занимают функции для метода 4 при распараллеливании на 180 ядер.

В случае распределения на 48 процессоров прогонка является более эффективным методом, чем метод Якоби (Таблица 1). Однако расчет интеграла в этом случае занимает значительно большее время, поэтому время полного расчета в этом случае больше (Таблица 2). В случае распределения задачи на большое количество процессоров основное время занимает синхронизация, поэтому имеет смысл совмещать требующий синхронизацию расчет СЛАУ и расчет невязки итерационного согласования уравнений (1),(2) и (3), т.е. распределять данные по третьей координате. Как видно из таблицы 2 это дает 30 процентный выигрыш по времени полного расчета. В случае использования метода 2 синхронизация не требуется, потому что расчет последнего шага и итерационной невязки выполняется на одном процессоре. Это делает этот метод незначительно более эффективным, чем метод 1.

Видно, что оптимальным методом является метод 4. Однако, распределение задачи на 180 ядер требует увеличение объема задачи, потому что дополнительным ядрам не остается данных. Увеличенная задача не оптимально распределяется на 144 процессора и считается не эффективно (Таблица 3). Полностью загруженными являются только треть процессоров, которые выполняют двойную работу, а остальные ожидают их решения. Видно, что увеличение размера задачи с совместным увеличением числа процессоров не изменяют время расчета, что говорит о масштабируемости задачи на 180 расчетных узлов. На рисунке 3 показано время, которые занимают функции при использовании метода 4 с эмпирически подобранным минимальным числом итераций для начала синхронизации. Видно, что в этом случае синхронизация занимает только 25% времени, а основное время затрачивается на пересылку данных на межпроцессорных границах. Пересылка, в свою очередь, так же требует синхронизацию соседних узлов, которая занимает от 60% до 95% в зависимости от узла, а остальное затрачивается на непосредственную передачу.

Таблица 1. Время метода решения СЛАУ

Задача	Расчет без интеграла $2*20*336*98*144$			
	Метод 1, сек	Метод 2, сек	Метод 3, сек	Метод 4, сек
Число процессоров				
144	226	184		112
48	197	146		

Таблица 2. Время расчета полной задачи с 144 точками по z

Задача	Полный Расчет $4*20*336*98*144$			
	Метод 1, сек	Метод 2, сек	Метод 3, сек	Метод 4, сек
Число процессоров				
144	1520	1108	1095	668
48	2225	2192	3022	2410

Таблица 3. Время расчета полной задачи с 180 точками по z

Задача	Расчет без интеграла $2*10*576*98*180$ , сек.	Полный расчет $4*10*576*98*180$ , сек.
Метод 4 на 144 процессорах	162	449
Метод 4 на 180 процессорах	146	255

В таблицах 1-3 представлены времена расчетов для нескольких вариантов реализации программы.

На рисунке 4 показана загрузка процессоров для методов 1-4. Небольшие отклонения от 100% для метода 4 связаны с особенностью задачи (неравномерным распределением нагрузки при расчете интеграла). В случае использования 5-ого метода загрузка была стопроцентной во время параллельного расчета интеграла и 1% при расчете последовательной части. Это связано с тем, что расчет интеграла проводится независимо для каждой точки. На 48 процессорах доли полной и нулевой загрузки были примерно равны.

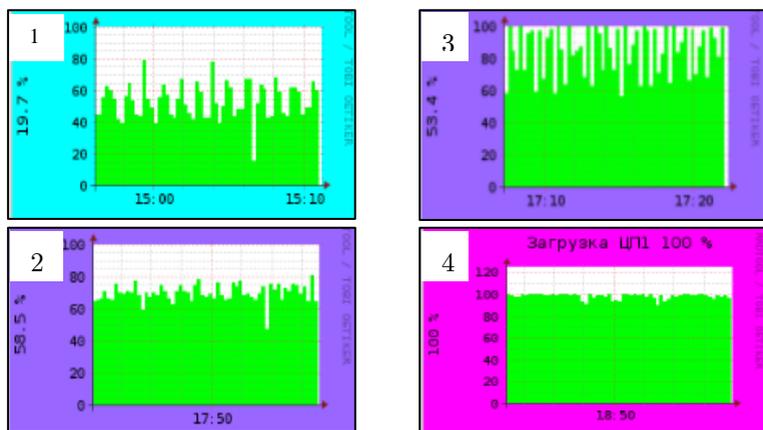


Рис. 4. Загрузка процессоров для различных методов. Для метода 1 в среднем равна 40%, 2 – 60%, 3 - 80%, а 4 - 100%.

## 6. Заключение

В работе представлена самосогласованная тепловая модель кинетики фазовых превращений происходящих в наплавленном слое при СЛС. Построенная модель в отличие от представленных в литературе не требует задавать форму наплавленного валика и отдельно рассматривать процессы эволюции микроструктуры, а позволяет напрямую получить оценку размера зерен закристаллизованного слоя при СЛС с инъекцией металлических порошков. Модель описывает влияние параметров и связанных процессов в ванне расплава и может быть использована для оценки и предсказания результирующих характеристик наплавленного методом селективного лазерного спекания слоя.

Для параллельной реализации модели используется метод Якоби и показана его эффективность и масштабируемость. Предложенный метод позволяет в реальное время решить сложные самосогласованные уравнения теплопроводности и изменения фазы. В дальнейшем для увеличения масштабируемости задачи планируется использовать явный метод расчета вместо неявного. Так же

планируется замена протокола передачи данных с Gigabit Ethernet на InfiniBand.

Работа выполнялась в рамках 1 этапа мероприятия 1.4 федеральной целевой программы «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014-2020 годы» соглашение № 14.626.21.0001 от 03 октября 2014г. и программы фундаментальных исследований Президиума РАН тема 43-п.

### Список литературы

**Bethune Iain [и др.]** Investigating the performance of asynchronous Jacobi's method for solving systems of linear equations [Журнал] // MIMS EPrint. - 2011 г.. - Т. 82.

**Сао Y. и Choi J** [Журнал] // J. Laser Appl.. - 2006 г.. - 3 : Т. 18. - стр. 245.

**Crespo D и Pradell T** Evaluation of time-dependent grain-size populations for nucleation and growth kinetics [Журнал] // PHYSICAL REVIEW B. - 1996 г.. - 5 : Т. 54. - стр. 3101-3109.

**Dinda G P, Dasgupta A K и Mazumder J** [Журнал] // Surface & Coatings Technology . - 2012 г.. - Т. 206. - стр. 2152–2160.

**Douglas J и Rachford H. H.** On the numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables [Журнал] // Trans. Amer. Math. Soc.. - 1956 г.. - Т. 82. - стр. 421-439.

**Gladush Gennady G. и Smurov I** Physics of Laser Materials Processing [Книга]. - Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 2011.

**Hea Xiuli [и др.]** Solute transport and composition profile during direct metal deposition with coaxial powder injection [Журнал] // Applied Surface Science . - 2011 г.. - Т. 258. - стр. 898–907.

**Mirzade F. Kh. [и др.]** [Журнал] // Physica B: Condensed Matter. - 2013 г.. - Т. 423. - стр. 69–76.

**Osher S и Fedkiw R** Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces [Книга]. - New York : Springer-Verlag, 2003.

**Pei Y. T. и DE HOSSON J. TH. M.** [Журнал] // Acta mater. - 2000 г.. - Т. 48. - стр. 2617-2624.

**Ramos R A, Rikvold Per Arne и Novotny M. A.** [Журнал] // Phys. Rev. B. - 1999 г.. - Т. 59. - стр. 9053.

**Sessa V, Fanfoni M и Tomellini M** [Журнал] // PHYSICAL REVIEW B. - 1996 г.. - 2 : Т. 54. - стр. 836-841.

**Voller V R и Swaminathan C R** General source-based method for solidification phase change [Журнал] // Numerical Heat Transfer B. - 1991 г.. - Т. 19. - стр. 175-189.

**Wen S. и Shin Y. C.** [Журнал] // Journal of Applied Physics. - 2010 г.. - Т. 108. - стр. 044908.

**Гришаев Р В [и др.]** [Журнал] // Физика и химия обработки материалов. - 2013 г.. - Т. 1. - стр. 12-23.

**Гришаев Р В, Мирзаде Ф Х и Хоменко М Д** [Журнал] // Перспективные материалы. - 2013 г.. - Т. 14. - стр. 241-248.

**Гришаев Р. В., Мирзаде Ф. Х. и Хоменко М. Д.** [Журнал] // Перспективные материалы. - 2011 г.. - Т. 10. - стр. 135-142.

**Жуков В. Т., Новикова Н. Д. и Феодоритова О. Б.** О многосеточном и явно-итерационном методах решения параболических уравнений [Отчет]: Препринт / ИПМ им. М.В.Келдыша. - 2014. - № 28.

**Патанкар С. П** Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости: Пер. с англ. [Книга]. - Москва : Энерго- атомиздат, 1984.

**Самарский А А и Вабищевич П Н** Вычислительная теплопередача [Книга]. - Москва : Едиториал УРСС , 2009.

**Хоменко М. Д. [и др.]** Численное моделирование селективного лазерного спекания порошков [Журнал] // Известия РАН Серия физическая. - 2015 г..

**Шишковский И В** Лазерный синтез функциональных мезоструктур и объемных изделий [Книга]. - Москва : Физматлит, 2009.

**Яненко Н. Н.** Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики [Книга]. - Новосибирск : НАУКА, 1967.

*Об авторе:*

**[ФОТО  
автора!]**

Хоменко Максим Дмитриевич

м.н.с. ИПЛИТ РАН,

*e-mail:* top20072007@rambler.ru

**[ФОТО  
автора!]**

Мирзаде Фикрет Хансуварович

Доктор физ.-мат. наук

Зав. Лаб. Мат. Моделирования

ИПЛИТ РАН

**[ФОТО  
автора!]**

Низьев Владимир Григорьевич

Доктор физ.-мат. наук, профессор

Нач. отдела ИПЛИТ РАН

Khomenko M.D., Mirzade F.Kh., Niziev V.G. Parallel computing in laser cladding

*Key Words and Phrases:* numerical modeling, laser cladding, Jacobi method