

Р. А. Ахметшин, И. И. Газизов, А. В. Юлдашев

## Комбинированный подход к построению параллельного предобуславливателя для решения задачи фильтрации углеводородов в пористой среде на графических процессорах

**Аннотация.** Данная работа направлена на разработку параллельных алгоритмов и программ решения систем линейных алгебраических уравнений на современных вычислительных системах с целью сокращения временных затрат при проведении гидродинамического моделирования нефтегазовых месторождений. Рассмотрены различные параллельные модификации неполного LU-разложения, предложен комбинированный алгоритм построения неполного LU-разложения и решения возникающих треугольных систем. Разработан линейный решатель, реализующий предложенный алгоритм, в том числе в составе двухступенчатого предобуславливателя CPR. Производительность решателя исследована на современной гибридной системе, оснащенной графическими процессорами NVIDIA.

**Ключевые слова и фразы:** графические процессоры, гидродинамическое моделирование, многоядерные системы, разрежённые матрицы, методы решения систем линейных алгебраических уравнений.

### Введение

Настоящая работа является продолжением проекта по разработке специализированного параллельного линейного решателя для задачи гидродинамического моделирования нефтегазовых месторождений [1]. Ранее для решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), возникающих в задаче многофазной фильтрации углеводородов в пористой среде, нами использовался предобусловленный итерационный метод бисопряжённых градиентов со стабилизацией (Biconjugate gradient stabilized method, BiCGStab) с параллельными модификациями неполного LU-разложения ILU(0) в качестве предобуславливателей. Данный метод был программно реализован

для традиционных многоядерных систем и гибридных вычислительных систем, оснащенных графическими процессорами NVIDIA, с использованием оптимизированных математических библиотек Intel Math Kernel Library, а также NVIDIA cuBLAS и cuSPARSE из состава CUDA Toolkit.

С выходом CUDA Toolkit версии 6.0 в библиотеке cuSPARSE появилась поддержка формата хранения разреженных матриц BSR (Block compressed Sparse Row) в функциях, связанных с использованием неполного LU-разложения и разложения Холецкого. Также недавно появилась свободная для некоммерческого использования библиотека NVIDIA AmgX, реализующая на алгебраический многосеточный метод (Algebraic Multigrid Method, AMG) [2] и ряд других методов решения СЛАУ на графических процессорах (Graphic Processing Unit, GPU). Это позволило с минимальными трудовыми затратами реализовать на GPU более сложный, но и более эффективный применительно к нашей задаче, двухступенчатый предобуславливатель CPR (Constrained Pressure Residual).

## 1. Используемые методы решения СЛАУ и предобуславливатели

Целью данной работы является ускорение решения СЛАУ, возникающих в ходе численного решения уравнений многофазной фильтрации потоков углеводородов в пористой среде, посредством использования потенциала современных многоядерных вычислительных систем, в том числе гибридных систем, оснащённых GPU NVIDIA.

Матрицы таких СЛАУ являются сильно разрежёнными и плохо обусловленными, поэтому для их решения принято использовать итерационные методы подпространства Крылова, например, метод бисопряжённых градиентов со стабилизацией с различными предобуславливателями.

Самым сложным вопросом при решении получаемых СЛАУ является выбор предобуславливателя. Из-за высокой жесткости системы решать систему без предобуславливателя или с простейшими вариантами (например, Якоби) не удастся, поскольку при большом числе итераций накопление вычислительной ошибки приводит к значительному искажению приближенного решения [диссертация Богачева].

Одним из наиболее часто используемых предобуславливателей, применяемых при численном решении уравнений многофазной фильтрации углеводородов, является неполное LU-разложение без заполнения (с нулевым заполнением) —  $ILU(0)$  [3], также используются и другие предобуславливатели класса  $ILU$  [4]. Ввиду сложности исходной задачи более эффективный подход заключается в применении специализированного двухступенчатого предобуславливателя CPR и его модификаций [5–7]. В рамках CPR выделяется локальный предобуславливатель, в качестве которого часто используется AMG, а также глобальный предобуславливатель —  $ILU(0)$ .

Классические алгоритмы построения предобуславливателя  $ILU(0)$  и решения сопутствующих систем с нижне- и верхнетреугольными матрицами обладают незначительным ресурсом параллелизма для СЛАУ с сильно разреженными матрицами. Существует несколько различных подходов к распараллеливанию предобуславливателей класса  $ILU$ . Одним из таких подходов является разделение матрицы на уровни, содержащие строки матрицы, которые могут обрабатываться параллельно [8]. Подобный подход реализован, например, в библиотеке NVIDIA cuSPARSE для GPU [9, 10]. Альтернативой является использование блочных модификаций предобуславливателей класса  $ILU$ , в которых предобуславливатель строится в виде блоков, которые могут обрабатываться параллельно. К ним можно отнести метод Капорина-Коньшина разбиения матрицы на блоки с перекрытиями, который может быть применён для линейных систем с несимметричными матрицами [11, 12], а также более простой подход — построение блочно-диагонального предобуславливателя (Block-Jacobi) [3].

## 2. Комбинированный подход к параллельному построению $ILU(0)$

При использовании алгоритма разделения на уровни важным параметром, влияющим на время построения неполного LU-разложения и решения сопутствующих треугольных систем, является число уровней, каждый из которых содержит строки, которые можно обрабатывать независимо друг от друга. Чем это число меньше, тем больше работы, которую можно выполнять параллельно. Для снижения числа уровней в матрице существует несколько подходов, одним из которых является разреживание. В качестве процедуры

разреживания в нашей работе предлагается использовать блочно-диагональное разбиение матрицы, аналогичное используемому в методе Block-Jacobi. В результате такого разбиения некоторые зависимости между строками матрицы исчезают ввиду исключения элементов, не попавших в блоки. Увеличение числа блоков блочно-диагонального разбиения приводит к уменьшению числа уровней в матрице, а значит увеличивается количество строк, которые можно обработать независимо друг от друга, что особенно важно для эффективного исполнения алгоритма на графических процессорах. Минусом такого подхода является ухудшение сходимости итерационного метода в связи с исключением некоторых элементов матрицы предобуславливателя. Например, в [1] было показано, что при решении СЛАУ на центральных процессорах методом BiCGStab с параллельным блочно-диагональным предобуславливателем: при разбиении матрицы на 8 и более блоков возможно увеличение числа итерации более чем в полтора раза. Таким образом эффективность распараллеливания предобусловленного метода BiSGStab существенно ограничена при использовании в качестве предобуславливателя блочно-диагональной модификации  $ILU(0)$ .

Однако в рамках двухступенчатого предобуславливателя CPR сходимость итерационного метода в целом должна быть менее чувствительна к качеству LU-разложения, чем в случае, когда  $ILU(0)$  используется в качестве единственного предобуславливателя.

В связи с вышесказанным в рамках построения предобуславливателя CPR предлагается следующий комбинированный подход к параллельному построению  $ILU(0)$  на GPU:

- (1) в качестве процедуры разреживания в исходной матрице выделяется блочно-диагональная часть;
- (2) на основе полученной блочно-диагональной матрицы строится разложение  $ILU(0)$  с использованием алгоритма деления на уровни.

### 3. Тестовая среда и особенности программной реализации

В таблице 1 рассмотрены характеристики тестовых матриц СЛАУ, полученных при гидродинамическом моделировании реальных нефтегазовых месторождений. Данные матрицы будут использованы далее для исследования эффективности различных алгоритмов решения СЛАУ.

Таблица 1. Характеристики матриц СЛАУ

Матрица	Размерность матрицы	Количество ненулевых элементов во всей матрице
1	1 500 000	55 815 624
2	4 320 921	85 471 137
3	6 610 263	118 221 633

При работе с матрицами в силу их разрежённости используется формат хранения со сжатием по строкам BSR, который поддерживается в библиотеках cuSPARSE и AmgX во всех используемых нами вычислительных операциях.

Локальный предобуславливатель строится на основе классического алгоритма алгебраического многосеточного метода, в качестве сглаживателя используется блочный метод Якоби, для решения задачи на грубой сетке — полное LU-разложение.

Далее будут приведены результаты исследования эффективности разработанного параллельного линейного решателя на современной гибридной вычислительной системе на базе центральных процессоров Intel Xeon E5 и графических процессоров NVIDIA K40, работающих в режиме ECC Off. Исследование проведено при решении тестовых СЛАУ с матрицами из таблицы 1. В ходе тестирования использовались следующие параметры: условие остановки итерационного процесса — достижение относительной невязкой величины  $\varepsilon = 1e - 6$ ; начальное приближение — нулевой вектор; расчёты проводились с двойной точностью.

#### 4. Результаты работы

В данном разделе приведены времена вычислений при решении СЛАУ на графических процессорах методом BiSGStab с двухступенчатым предобуславливателем CPR, в качестве одной ступени которого используется ILU(0). Построение ILU(0) осуществлялось двумя способами: с использованием алгоритма разделения на уровни, а также комбинированного подхода, в котором перед началом работы алгоритма разделения на уровни выделяется блочно-диагональная часть матрицы.

Таблица 2 показывает, что при использовании комбинированного подхода количество уровней в матрице уменьшается, а значит, увеличивается количество строк, обрабатываемых независимо, что приводит к снижению время построения предобуславливателя на 10–16 % (таблица 3).

Таблица 2. Количество уровней в матрице при использовании разных алгоритмов ILU(0)

Матрица	Количество уровней в матрице	
	Алгоритм разделения на уровни	Комбинированный подход, в скобках количество блоков
1	458	211 (64)
2	432	195 (128)
3	706	345 (128)

Таблица 3. Время построения предобуславливателя ILU(0) для различных матриц

Матрица	Время построения предобуславливателя ILU(0), с	
	Алгоритм разделения на уровни	Комбинированный подход
1	0,069	0,062
2	0,189	0,158
3	0,189	0,158

Рассмотрим сводную таблицу результатов, где приведены времена решения СЛАУ с использованием разных предобуславливателей: двухступенчатого CPR с комбинированным алгоритмом построения неполного LU-разложения и с алгоритмом разделения на уровни и одноступенчатого ILU(0).

ТАБЛИЦА 4. Время решения СЛАУ на GPU различными методами

Матрица	Время решения СЛАУ, с / Количество итераций							
	ILU(0) с алгоритмом разделения на уровни		ILU(0) с комбинированным подходом		CPR с алгоритмом разделения на уровни		CPR с комбинированным подходом	
1	0,112	2	0,139	2	0,156	2	0,151	2
2	2,644	16	2,835	19	0,851	4	0,814	4
3	1,009	4	1,429	6	0,736	2	0,714	2

Ввиду относительно высокой трудоемкости построения двухступенчатого предобуславливателя и малого количества итераций при решении СЛАУ с матрицей №1 можно увидеть небольшое замедление при использовании CPR. Однако с ростом размерности матрицы преимущество использования CPR относительно ILU(0) становится очевидно. При этом, ускорение при использовании CPR с комбинированным алгоритмом ILU(0) достигает 3,25 раза относительно лучшего времени решения СЛАУ с предобуславливателем ILU(0).

### Список литературы

- [1] И. И. Газизов, А. В. Юлдашев. *Разработка параллельного линейного решателя для задачи гидродинамического моделирования нефтегазовых месторождений* // Эвристические алгоритмы и распределённые вычисления, 2014. Т. 1, № 1, с. 88–96. ↑1, 4
- [2] J. W. Ruge, K. Stüben. *Algebraic multigrid (AMG)* // Multigrid Methods / S. F. McCormick (ed.)— Philadelphia, PA, USA: SIAM, 1987. Vol. 3, p. 73–130. ↑2
- [3] Y. Saad. *Iterative methods for sparse linear systems*. 2nd ed. Philadelphia, PA, USA: SIAM, 2003.— 528 p. ↑3
- [4] К. Ю. Богачев, Я. В. Жабицкий. *Блочные предобуславливатели класса ILU для задач фильтрации многокомпонентной смеси в пористой среде* // Вестник МГУ. Серия 1, Математика. Механика, 2009, № 5, с. 19–25. ↑3
- [5] J. R. Wallis, R. P. Kendall, T. E. Little. *Constraint residual acceleration of conjugate residual method* // SPE 13536, 1985, p. 415–428. ↑3
- [6] К. Ю. Богачев, И. Г. Горелов. *Применение параллельного предобуславливателя CPR к задаче фильтрации вязкой сжимаемой жидкости в пористой среде* // Вычислительные методы и программирование: НИВЦ МГУ, 2008. Т. 9, с. 184–190. ↑3
- [7] О. С. Борщук. *О модификации двухступенчатого метода предобуславливания при численном решении задачи многофазной фильтрации вязкой сжимаемой жидкости в пористой среде* // Вестник УГАТУ, 2009. Т. 12, № 1, с. 146–150. ↑3

- [8] Y. Saad, R. Li. *GPU-accelerated preconditioned iterative linear solvers* // The Journal of Supercomputing, February, 2013. Vol. **63**, no. 2, p. 443–466. ↑3
- [9] M. Naumov. *Parallel Solution of Sparse Triangular Linear Systems in the Preconditioned Iterative Methods on the GPU*: Technical Report NVR-2011-001 NVIDIA, June, 2011. ↑3
- [10] M. Naumov. *Incomplete-LU and Cholesky Preconditioned Iterative Methods Using CUSPARSE and CUBLAS*: Technical Report NVR-2012-003 NVIDIA, May, 2012. ↑3
- [11] К. Ю. Богачев, А. С. Богатый, А. Р. Лапин. *Использование графических ускорителей и вычислительных сопроцессоров при решении задачи фильтрации* // Вычислительные методы и программирование: НИВЦ МГУ, 2013. Т. **14**, с. 357–361. ↑3
- [12] И. Е. Капорин, И. Н. Коньшин. *Параллельное решение симметричных положительно-определенных систем на основе перекрывающегося разбиения на блоки* // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2000. Т. **41**, № 4, с. 515–528. ↑3

*Об авторах:*

**Рауль Аликович Ахметшин**

Инженер кафедры Высокопроизводительных вычислительных технологий и систем.

*e-mail:* [raul.akhmetshin@gmail.com](mailto:raul.akhmetshin@gmail.com)

**Ильяс Ильшатович Газизов**

Магистрант, направление Прикладная математика и информатика.

*e-mail:* [igpooh@gmail.com](mailto:igpooh@gmail.com)

**Артур Владимирович Юлдашев**

Старший преподаватель кафедры Высокопроизводительных вычислительных технологий и систем.

*e-mail:* [arthur@mail.rb.ru](mailto:arthur@mail.rb.ru)

*Образец ссылки на эту публикацию:*

Р. А. Ахметшин, И. И. Газизов, А. В. Юлдашев. *Комбинированный подход к построению параллельного предобуславливателя для решения задачи фильтрации углеводородов в пористой среде на графических процессорах* // Программные системы: теория и приложения: электрон. научн. журн. 2014. Т. ??, № ?, с. ??–??.

*URL:*

<http://psta.psir.ru/read/>



Raul Akhmetshin, Ilyas Gazizov, Arthur Yuldashev. *Combined method of parallel preconditioner building on GPU for solving filtration problem.*

ABSTRACT. This paper describes a parallel algorithm design and system of linear algebraic equation solver development on state-of-the-art computer system. The main goal of these works is reducing runtime of oil and gas fields hydrodynamic modeling. We viewed different LU decomposition modifications and proposed new combined algorithm of LU decomposition and solving corresponding triangular systems. We developed linear solver that implements suggested algorithm including two stage preconditioner CPR. In this paper we estimate performance on modern NVIDIA GPUs of linear solver that we developed. (*in Russian*).

*Key Words and Phrases:* graphics processors, hydrodynamic modeling, multi- and manycore systems, sparse matrices, systems of linear algebraic equations solving methods.